Lösung zur Aufgabe "Würfel färben" von Heft 20

(1) Jedes der 24 Teilquadrate grenzt an genau eine der acht Ecken. Da nach unserer Vorschrift die drei Teilquadrate an jeder Ecke unterschiedlich gefärbt sein müssen, gibt es jeweils genau acht Teilquadrate in den Farben Blau, Gelb und Rot.

(2) Es gibt genau sechs Möglichkeiten der Einfärbung der Seitenflächen (Angabe der Flächen zyklisch):

I	blau – gelb – blau – gelb
II	gelb – rot – gelb – rot
III	rot – blau – rot – blau
(i)	rot – blau – rot – gelb
(ii)	blau – gelb – blau – rot
(iii)	gelb – rot – gelb – blau

(3) Bezeichnet man mit u, v, w, x, y, z die Anzahlen der Seitenflächen vom Typ $I, II, III, (i), (ii), (iii)$, so muss wegen (1) folgendes Gleichungssystem erfüllt sein (die Gleichungen entsprechen den Anzahlen der roten, blauen und gelben Teilquadrate):

$$\begin{array}{rcrcrcrcrcrcr} & & 2v & + & 2w & + & 2x & + & y & + & z & = & 8 \\ 2u & & & + & 2w & + & x & + & 2y & + & z & = & 8 \\ 2u & + & 2v & & & + & x & + & y & + & 2z & = & 8 \end{array}$$

Da auf jeder Seitenfläche von jeder Farbe jeweils höchstens zwei Teilquadrate liegen können, muss sich jede der Farben auf mindestens vier Seitenflächen verteilen, d. h. es müssen $u, v, w \in \{0, 1, 2\}$ sein. Unter Berücksichtigung der Symmetrie im Gleichungssystem muss man nur wenige Fälle von Vorgaben von u, v, w betrachten und erhält genau folgende mögliche Kombinationen von Seitenflächen:

a) $2 \times I + 2 \times II + 2 \times III$

b) $2 \times I + 1 \times II + 1 \times III + 2 \times (i)$
$2 \times II + 1 \times III + 1 \times I + 2 \times (ii)$
$2 \times III + 1 \times I + 1 \times II + 2 \times (iii)$

c) $1 \times I + 1 \times II + 1 \times III + 1 \times (i) + 1 \times (ii) + 1 \times (iii)$

d) $1 \times I + 1 \times II + 2 \times (i) + 2 \times (ii)$
$1 \times II + 1 \times III + 2 \times (ii) + 2 \times (iii)$
$1 \times III + 1 \times I + 2 \times (iii) + 2 \times (i)$

e) $2 \times I + 4 \times (i)$
$2 \times II + 4 \times (ii)$
$2 \times III + 4 \times (iii)$

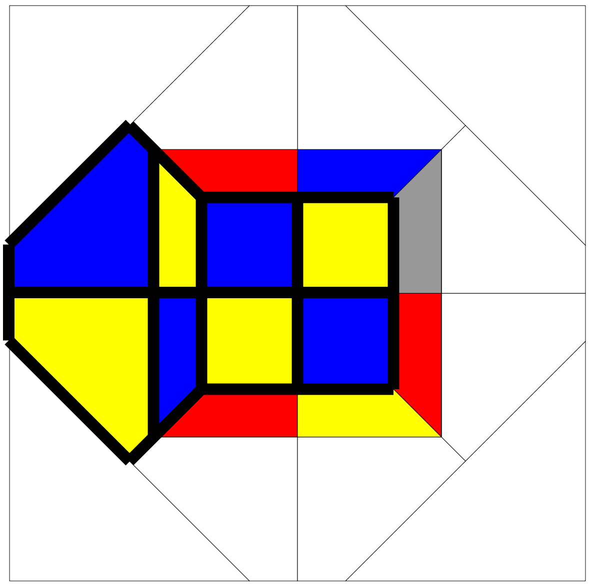
f) $1 \times I + 3 \times (i) + 1 \times (ii) + 1 \times (iii)$
$1 \times II + 3 \times (ii) + 1 \times (iii) + 1 \times (i)$
$1 \times III + 3 \times (iii) + 1 \times (i) + 1 \times (ii)$

g) $2 \times (i) + 2 \times (ii) + 2 \times (iii)$

Wir werden im Folgenden untersuchen, wie viele Würfel es zu den Fällen a) – g) gibt. Dabei werden wir uns, wenn es sich empfiehlt, stets auf den ersten Unterfall von b) und d) – f) beschränken (die anderen erhält man jeweils durch zyklische Vertauschung der Farben). Zur Illustration verwenden wir perspektivische Darstellungen von Würfeln, bei denen die vordere Fläche bis auf Dreiecke in den Ecken entfernt wurde. Die farblich vorgegebenen Quadrate werden fett umrandet, und die Einfärbung der übrigen wird fortgesetzt, soweit dies aufgrund der Vorschrift und unter Berücksichtigung der jeweils zur Verfügung stehenden Seitenflächen eindeutig möglich ist, gegebenenfalls höchstens bis ein Widerspruch (angedeutet durch eine graue Fläche) erreicht ist.

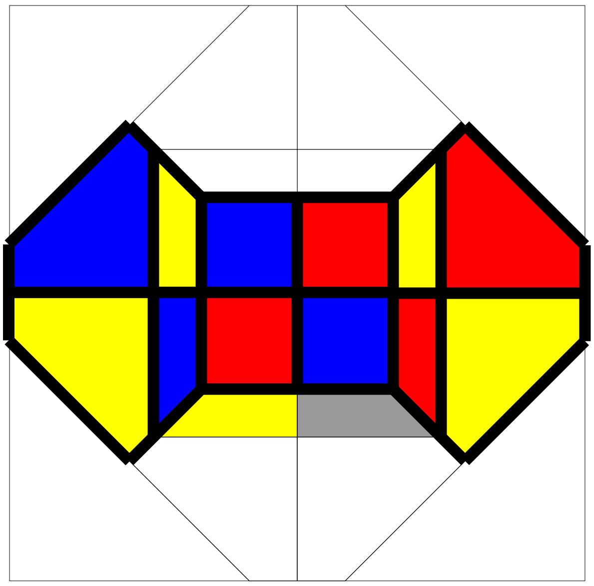
(4) **Lemma.** Zwei gleiche Flächen vom Typ I, II oder III können nicht benachbart sein.

Beweis. Anderenfalls führt die Vorschrift schnell zu einem Widerspruch:

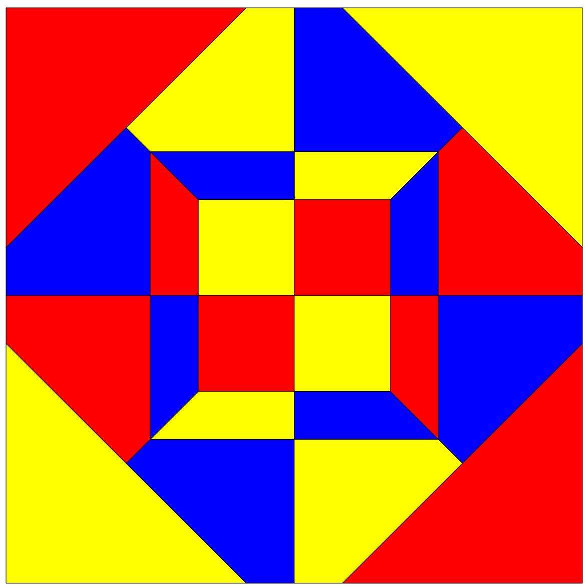


(5) **Lemma.** Eine Kombination je einer Fläche vom Typ I, II und III hat eine gemeinsame Ecke.

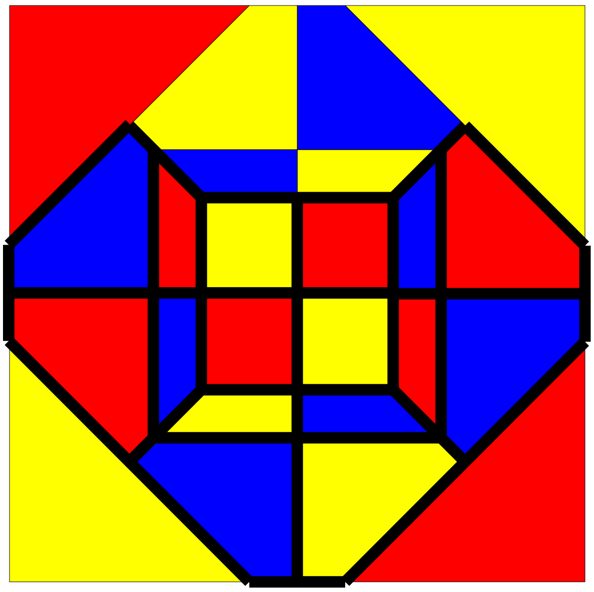
Beweis. Anderenfalls wäre nur eine Situation wie folgt denkbar, die zum Widerspruch führt:



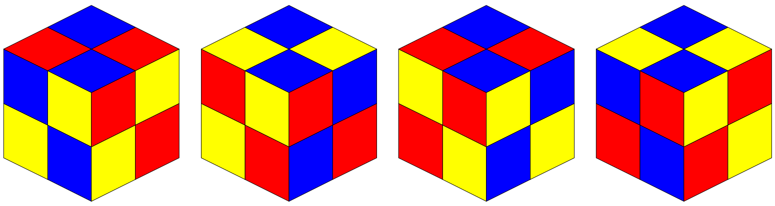
(6) Mit (4) folgt sehr leicht: Es gibt genau zwei Würfel vom Typ 3a). Wir zeigen einen davon, den anderen erhält man als Spiegelbild:



(7) Typ 3b) ist unmöglich, denn nach (4) und (5) ist die Lage der zweifarbigen Flächen bis auf Farbpermutationen und Spiegelungen eindeutig vorgegeben und lässt sich nur zu Würfeln vom Typ 3a) ergänzen:

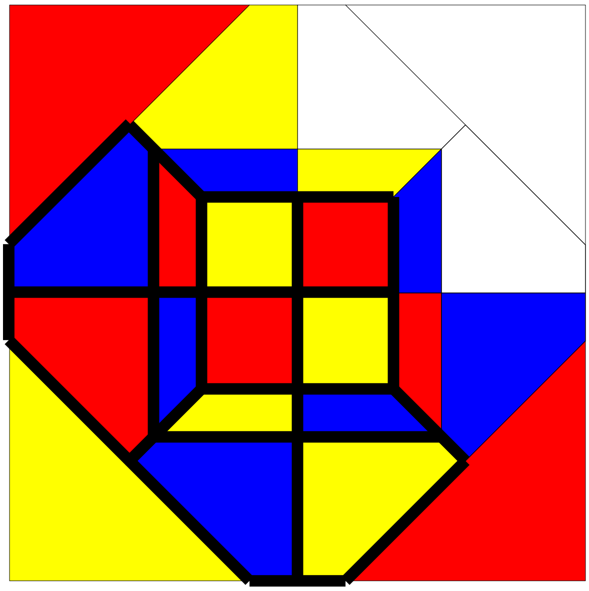


(8) Es gibt genau vier Würfel vom Typ 3c): Nach (5) können die Flächen vom Typ I, II und III nur um eine Ecke gruppiert werden in vier möglichen Varianten:



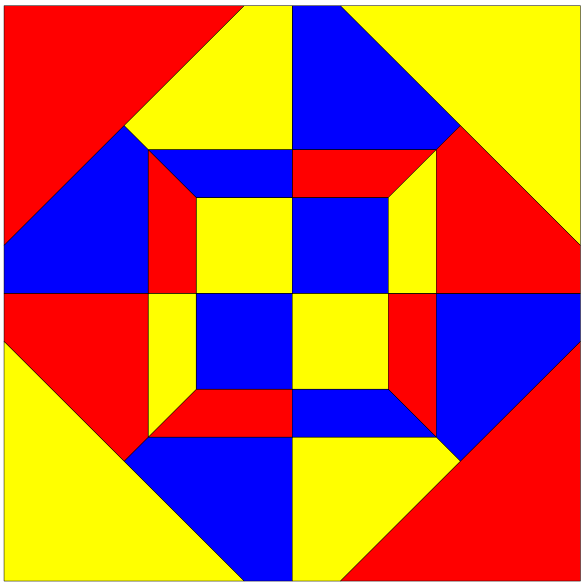
Alle diese Varianten tauchen als mögliche Eckenkonfigurationen bei den Lösungen vom Typ 3a) auf. Dreht man nun in diesen Lösungen die gegenüberliegende Ecke mit den angrenzenden Teilquadraten in der geeigneten Richtung um den Winkel 120°, so erhält man eine Lösung gemäß 3c).

Startet man andererseits mit einer der obigen vier Varianten, so ist unter Berücksichtigung der Vorschrift die Ergänzung bis auf die drei Teilflächen um die gegenüberliegende Ecke eindeutig:



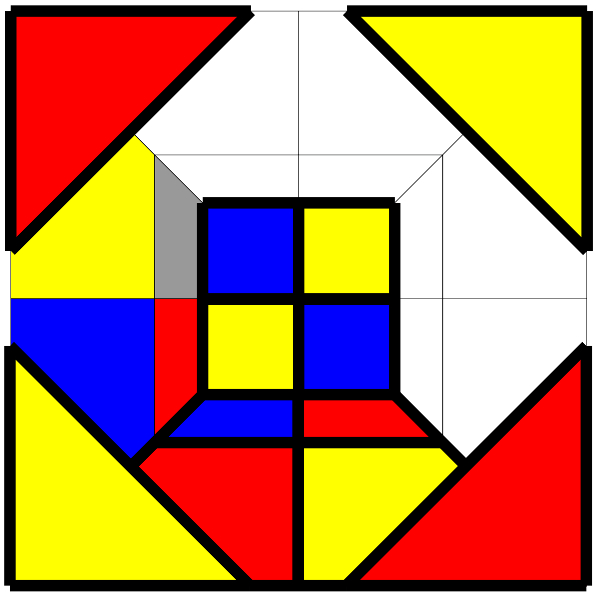
Man hat dann nur zwei Alternativen einer Ergänzung zu einem zulässigen Würfel: Die eine ergibt einen Würfel vom Typ 3a), die andere den gewünschten Würfel vom Typ 3c).

(9) Es gibt genau sechs Würfel vom Typ 3d): Man kann diese realisieren, indem man bei Würfeln vom Typ 3a) bei zwei Ecken, die auf einer Seitenfläche diagonal gegenüber liegen, eine Drehung um 120° wie in vorherigen Abschnitt beschrieben ausführt. Ein Beispiel wäre:

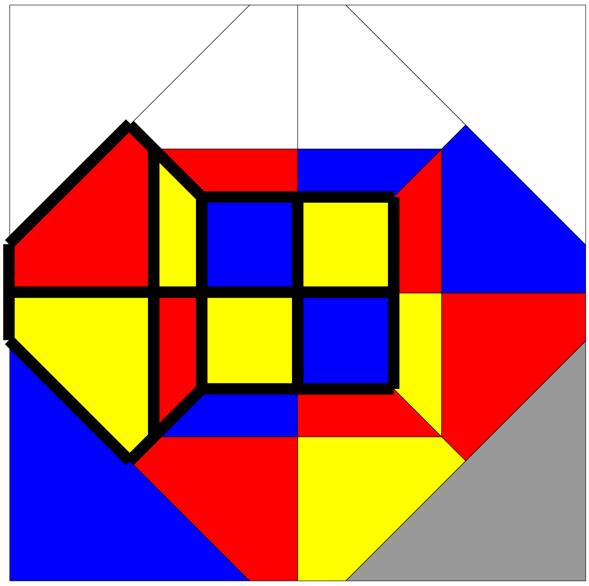


Man beachte, dass die beiden zweifarbigen Flächen einander gegenüber liegen, und zwar so, dass die Diagonalen der doppelt vorkommenden Farbe (in unserem Beispiel Gelb) nicht parallel sind. Geht man umgekehrt von diesen beiden derart positionierten zweifarbigen Flächen aus, so gibt es genau zwei Möglichkeiten einer Ergänzung zu einem zulässigen Würfel, die zueinander spiegelbildlich sind. Berücksichtigt man Farbpermutationen und Spiegelungen, so erhält man insgesamt sechs Lösungen, da man mit anderen Konfigurationen nicht zum Ziel kommt:

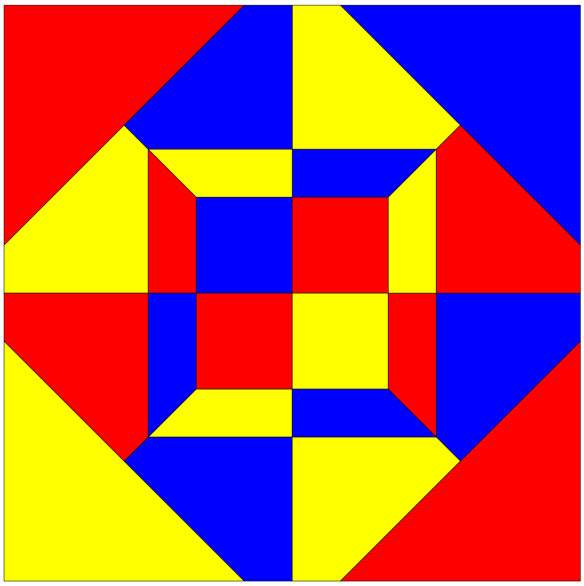
α) Mit gegenüberliegenden zweifarbigen Flächen, aber parallelen gleichfarbigen Diagonalen erhält man wie folgt einen Widerspruch (andere Varianten ließen sich analog behandeln):



β) Benachbarte zweifarbige Flächen führen bei Berücksichtigung der zur Verfügung stehenden Seitenflächen (im folgenden Beispiel nur (i) und (ii)) ebenfalls zu einem Widerspruch:



(10) Es gibt genau sechs Würfel vom Typ 3e): Man kann diese realisieren, indem man bei auf waagrechter Unterlage liegenden Würfeln vom Typ 3a) die obere Hälfte um 90° dreht. Ein Beispiel wäre:



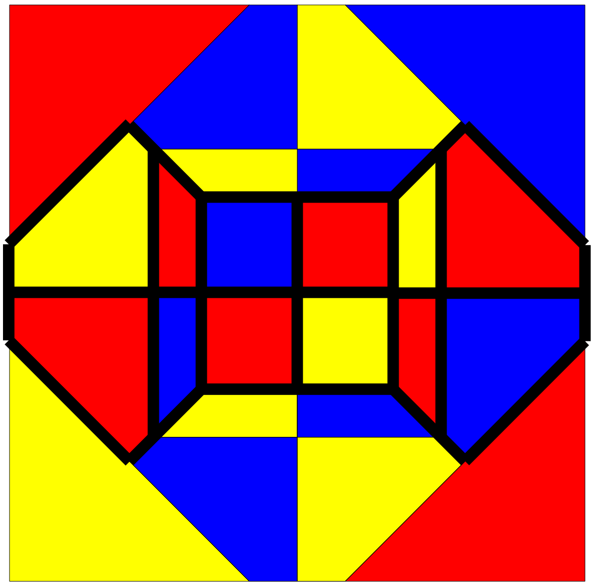
Bei den zweifarbigen Seitenflächen sind dabei die gleichfarbigen Diagonalen parallel. Unter Berücksichtigung von Farbpermutationen und Spiegelungen erhält man genau sechs Möglichkeiten.

Weitere Varianten vom Typ 3d) sind nicht möglich: Zunächst müssen nach (4) die zweifarbigen Flächen einander gegenüber liegen.

α) Beginnt man nun mit den gegenüberliegenden zweifarbigen Seitenflächen (z. B. vom Typ I) mit parallelen gleichfarbigen Diagonalen, so lässt sich eine Seitenfläche vom Typ (i) nur auf zwei (spiegelbildliche) Weisen einpassen – der Rest ist dann eindeutig bestimmt.

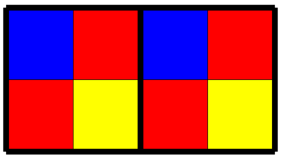
β) Zwei gegenüberliegende zweifarbige Seitenflächen mit nicht parallelen gleichfarbigen Diagonalen führen zwangsläufig zu einem Würfel vom Typ 3a).

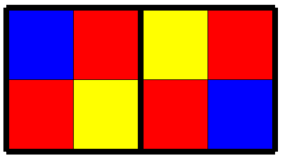
(11) Der Typ 3f) lässt sich nicht realisieren: Zunächst sieht man leicht, dass die drei gleichen Flächen (z. B. vom Typ (i)) nicht um eine gemeinsame Ecke herum gruppiert sein können. Sie müssen also nebeneinander angeordnet sein, wobei die jeweils nur einfach vorkommenden farbigen Teilquadrate wechselseitig auf der einen und anderen Seite liegen müssen (anderenfalls würde die vorschriftsmäßige Ergänzung zu einem Widerspruch führen). Wir haben also notwendig folgende, bis auf Äquivalenz eindeutige Situation, die unter Berücksichtigung der Vorschrift zu einem Würfel vom Typ 3e) führt:



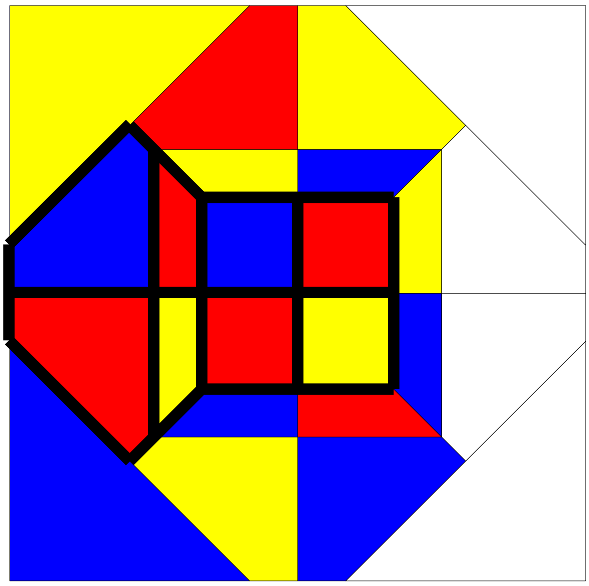
(12) Es gibt genau 21 Würfel vom Typ 3g), und zwar gibt es acht Würfel, bei denen gleiche Seitenflächen (vom Typ $(i), (ii)$ und (iii)) jeweils benachbart sind, zwölf Würfel mit zwei Paaren benachbarter gleicher Seitenflächen und einem Paar einander gegenüber liegender gleicher Seitenflächen und schließlich noch einen Würfel mit drei Paaren einander gegenüber liegender gleicher Seitenflächen:

α) Benachbarte gleiche Seitenflächen (z. B. vom Typ (i)) können, abgesehen von Spiegelungen und Farbpermutationen, auf zwei verschiedene Arten angeordnet sein:

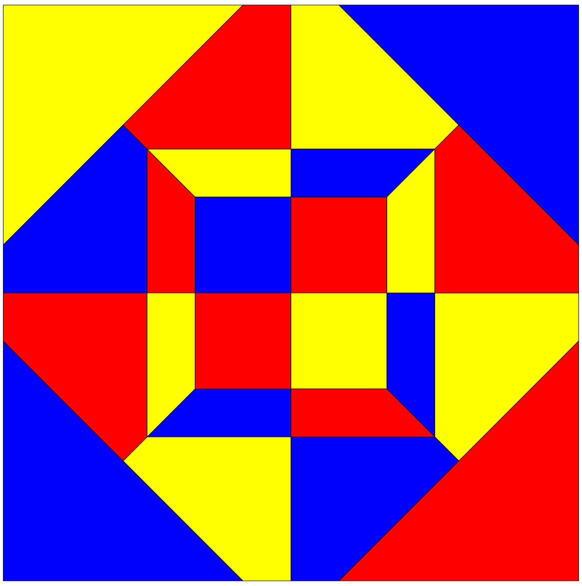




Wir bezeichnen die linke Form *Variante A*, die rechte *Variante B*. Beginnen wir mit zwei benachbarten gleichen Seitenflächen gemäß Variante A. Dann ist die Einfärbung der übrigen Quadrate mit Ausnahme von vier Teilquadraten eindeutig vorgegeben:

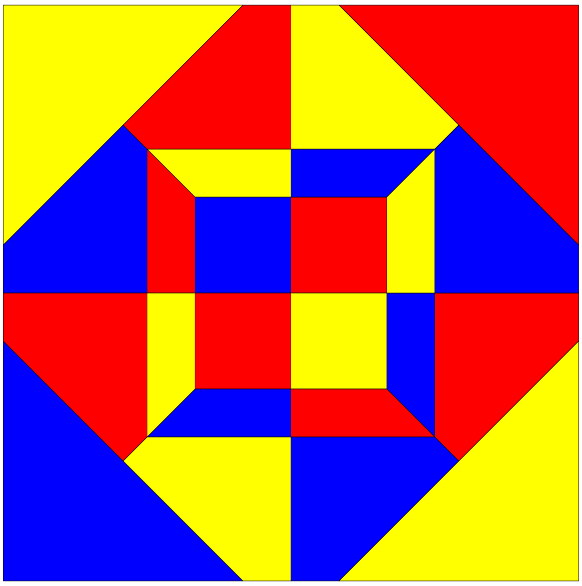


Es gibt nun genau zwei Möglichkeiten der Vervollständigung des Würfels, die beide zu Würfeln führen, bei denen gleiche Seitenflächen benachbart sind. Dabei entsprechen beim ersten Würfel alle Seitenflächenpaare der Variante A:

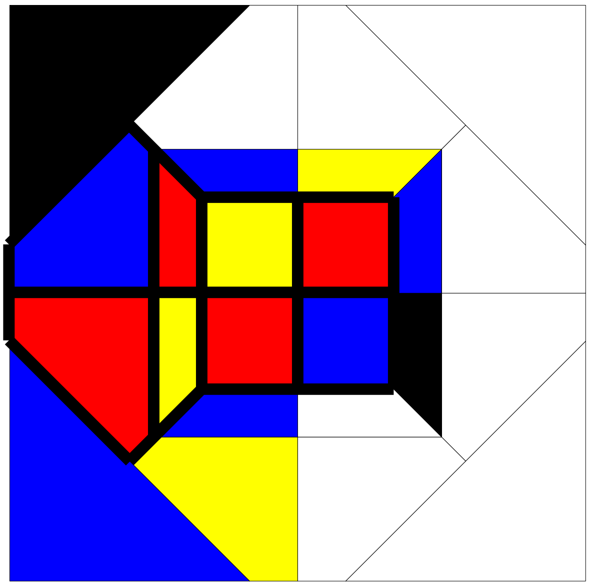


Bei diesem Würfel ändern Farbpermutationen das Aussehen des Würfels nicht, wohl aber Spiegelungen an einer Ebene, d. h. es gibt genau zwei Würfel von diesem Untertyp 3gα).

β) Bei der zweiten Vervollständigung entspricht ein Seitenflächenpaar der Variante A, die beiden anderen aber der Variante B:

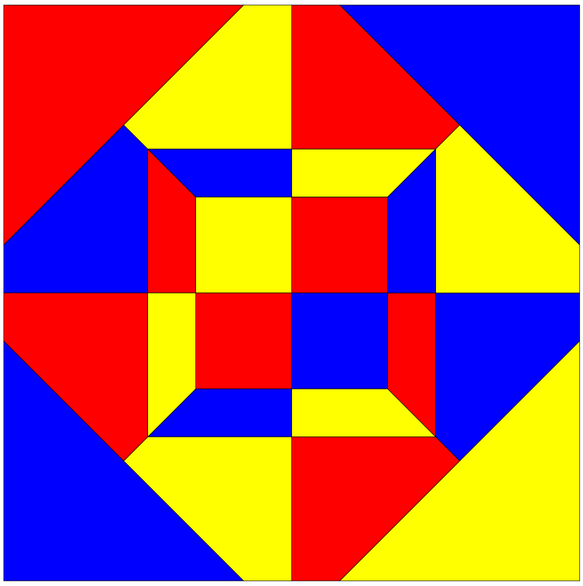


Es gibt genau sechs Würfel dieses Untertyps 3gβ), die man mittels zyklischer Vertauschung der Farben und Spiegelungen an einer Ebene aus dem dargestellten Beispiel erhält. Geht man von einem Seitenflächenpaar gemäß der Variante B aus, so kann man die Einfärbung wie folgt eindeutig fortsetzen:

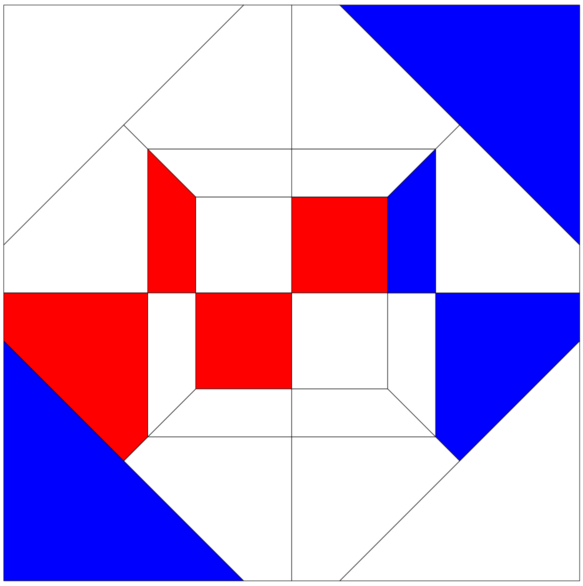


Wir haben zudem in der Darstellung zwei Teilquadrate schwarz markiert, bei denen wir jeweils bei der Einfärbung zwischen Rot und Gelb wählen können. Tatsächlich führen alle vier Möglichkeiten jeweils eindeutig zu zulässigen Würfeln. Färbt man die schwarz markierten Teilquadrate unterschiedlich ein, d. h. einmal rot und einmal gelb, so erhält man wieder einen Würfel vom Untertyp 3gβ) (bitte selbst ausprobieren).

γ) Färbt man aber die schwarz markierten Teilquadrate beide rot, so erhält man bei Berücksichtigung der Tatsache, dass wir nur dreifarbige Seitenflächen zulassen, einen Würfel mit einem Paar gegenüberliegender gleicher Quadrate und zwei Paaren benachbarter gleicher Quadrate der Variante B:

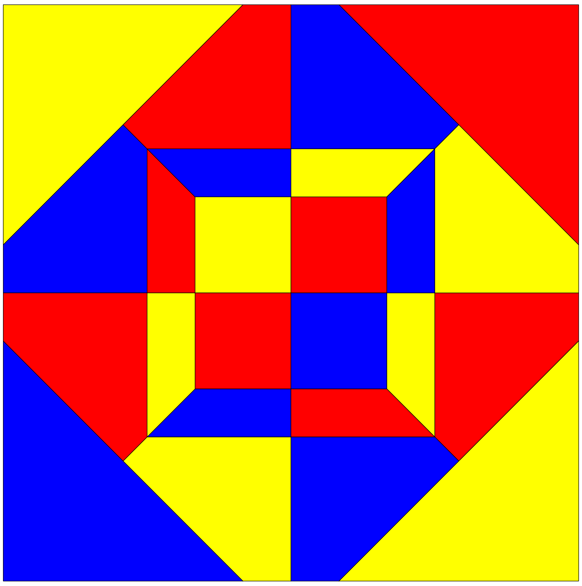


Man sieht sehr leicht, dass dieser Würfel schon eindeutig durch die Vorgabe der einfarbigen Diagonalen der benachbarten gleichen Flächen bestimmt ist:

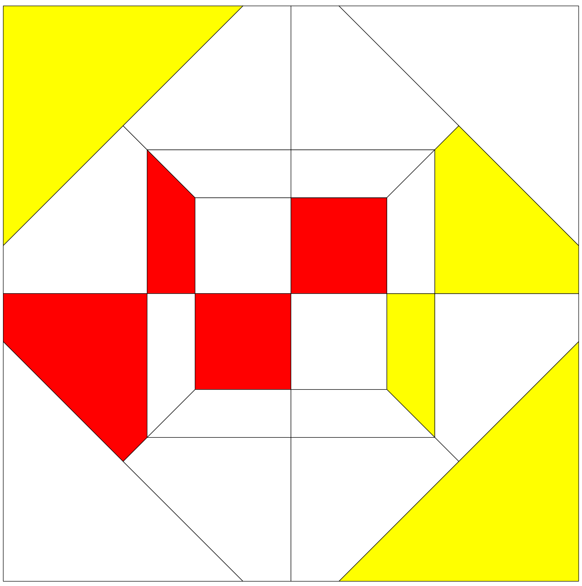


Daraus folgt unter Berücksichtigung der Farbpermutationen, dass es von diesem Untertyp 3gγ) genau sechs Würfel gibt.

δ) Färbt man schließlich die im Bild auf Seite 11 schwarz markierten Quadrate beide gelb, so lässt sich die Einfärbung auf eindeutige Weise wiederum zu einem Würfel fortsetzen mit einem Paar gegenüberliegender gleicher Quadrate und zwei Paaren benachbarter gleicher Quadrate der Variante B:



Auch in diesem Falle ist die Einfärbung des Würfel schon eindeutig gegeben durch die Vorgabe der einfarbigen Diagonalen der benachbarten gleichen Flächen:



Man beachte, dass im Vergleich zum Untertyp 3gγ) diese Diagonalen anders angeordnet sind, d. h. wir haben einen neuen Untertyp 3gδ) erhalten. Auch von diesem Untertyp gibt es genau sechs Würfel, die mittels zyklischer Farbpermutationen und Spiegelungen an einer Ebene erzeugt werden können.

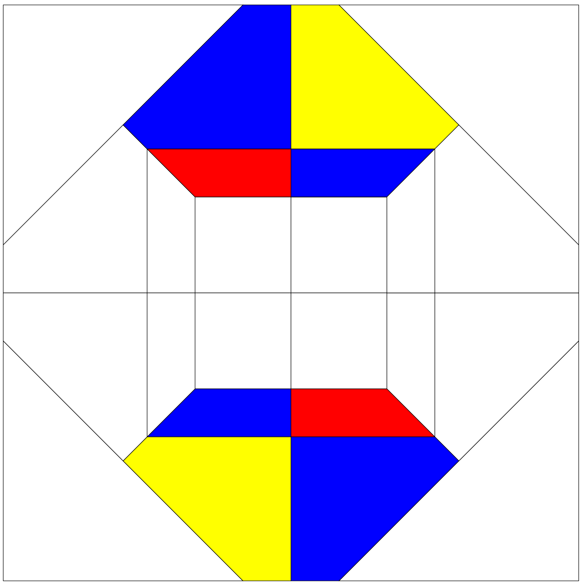
ε) Um zu überprüfen, ob es noch weitere Würfel vom Typ 3g) gibt, gehen wir nun von einem Paar gegenüberliegender gleicher dreifarbiger Flächen aus. Dabei müssen wir drei Fälle unterscheiden:

i) Die einfarbigen Diagonalen sind nicht parallel.

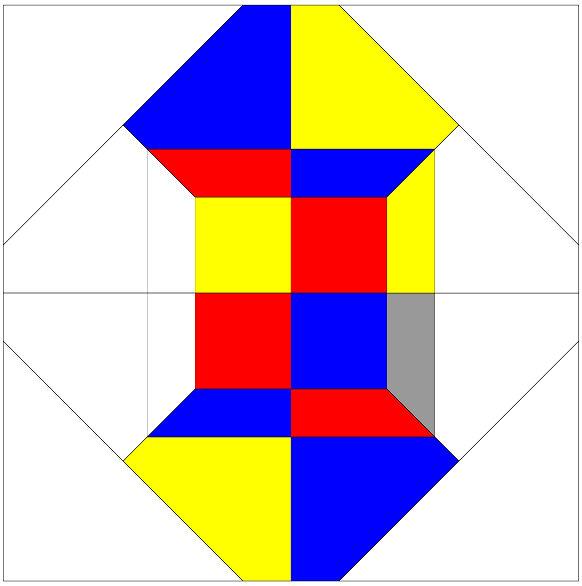
ii) Die einfarbigen Diagonalen sind parallel und bei den anderen Teilquadraten liegen gleiche Farben auf der gleichen Seite.

iii) Die einfarbigen Diagonalen sind parallel und bei den anderen Teilquadraten liegen gleiche Farben auf verschiedenen Seiten.

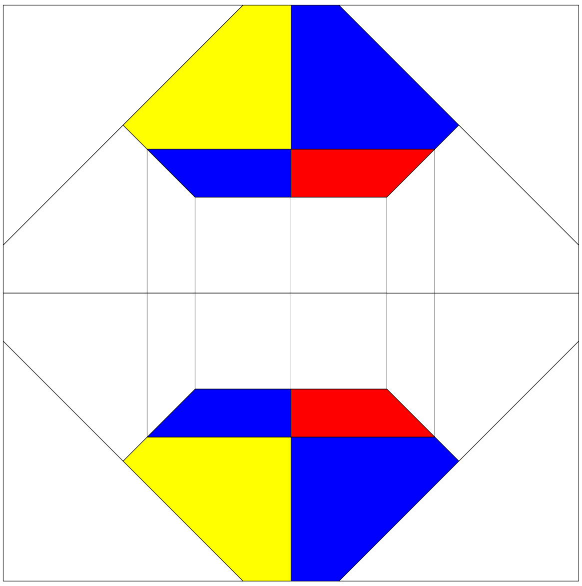
i) In diesem Falle ist die Ergänzung zu einem Würfel vom Typ 3g) nicht möglich (wohl aber zu Würfeln vom Typ 3d) und 3e); vgl. (9) und (10)). Wir müssen nämlich, von Farbpermutationen und Spiegelungen abgesehen, mit folgender Situation rechnen:



Im kleinen Quadrat dazwischen lässt sich von den gemäß Typ 3g) zur Verfügung stehenden Seitenflächen nur (i) auf zwei verschiedene Weisen einpassen, die beide sofort zu einem Widerspruch führen – hier nur einer der beiden Fälle:

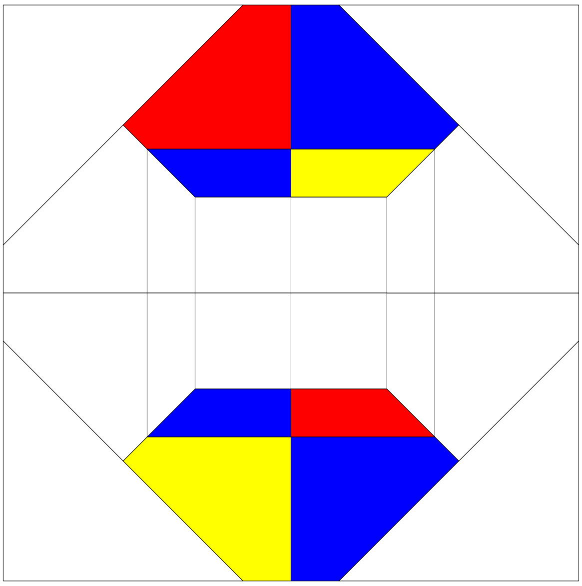


ii) Nun haben wir z. B. folgende Situation:

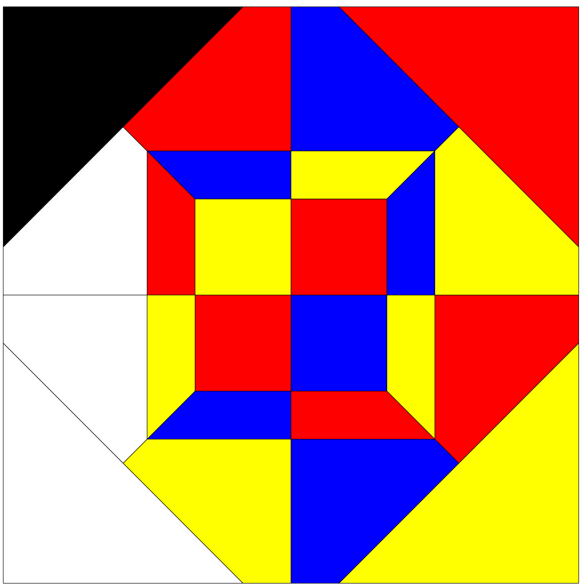


Bei diesem Beispiel können wir im mittleren kleinen Quadrat nur eine Fläche (*iii*) auf zwei zueinander spiegelbildliche Weisen einbauen. Man prüft leicht nach, dass dann nur auf eine Weise eine korrekte Ergänzung möglich ist, und zwar zu einem Würfel vom Untertyp 3gγ).

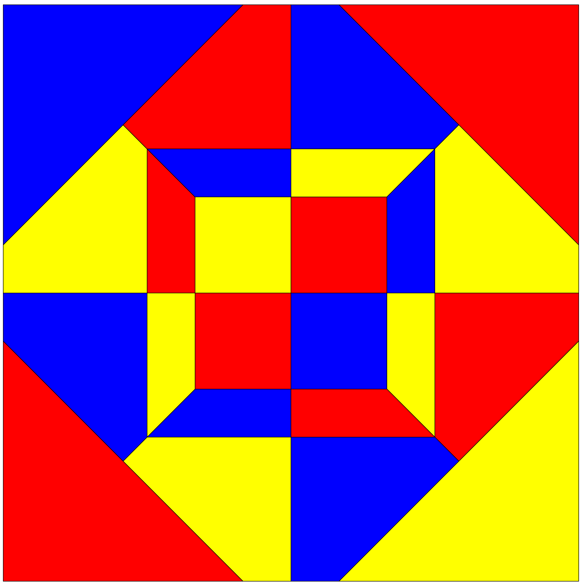
iii) Zuletzt müssen wir noch eine Situation betrachten wie im folgenden Beispiel:



In diesem Falle passt ins mittlere kleine Quadrat sowohl eine Fläche (i) als auch eine Fläche (iii), jeweils auf genau eine Weise. Da beide Fälle sich äquivalent behandeln lassen, beschränken wir uns auf (i). Unter Berücksichtigung der Vorschrift ist die Einfärbung bis auf vier Teilquadrate eindeutig bestimmt:



Z. B. haben wir bei dem schwarz markierten Teilquadrat die Wahl zwischen Gelb und Blau. Wählen wir Gelb, so erhalten wir schließlich einen Würfel vom Untertyp 3gδ), mit Blau aber erhalten wir einen neuen Untertyp 3gε), bei dem gleiche Flächen jeweils gegenüberliegend angeordnet sind (siehe auch das Titelbild von *mathe-lmu.de*, Heft 21):



Tatsächlich gibt es von diesem Untertyp nur diesen einen Würfel, denn sowohl Farbpermutationen als auch Spiegelungen an einer Ebene ändern nichts am Aussehen.

(13) Wie oben gezeigt wurde, gibt es genau zwei Würfel vom Typ 3a), jeweils keinen vom Typ 3b) und 3f), vier vom Typ 3c), je sechs vom Typ 3d) und 3e) und schließlich 21 vom Typ 3g), d. h. genau 39 verschiedene Würfeleinfärbungen sind mit unserer Vorschrift möglich.

(14) Zuletzt noch eine Bemerkung zu den Gruppen von Drehungen, welche die Würfel einschließlich ihrer Farbgebung zur Deckung bringen. Natürlich müssen diese isomorph sein zu Untergruppen der symmetrischen Gruppe S_4, d. h. der Oktaeder- oder Würfelgruppe. So erhalten wir hierbei die triviale Gruppe $\mathbb{Z}_1$ für die (Unter-)Typen 3c), 3gα), 3gβ) und 3gε), die zweielementige Gruppe $\mathbb{Z}_2$ für die (Unter-)Typen 3d), 3gγ) und 3gδ) sowie die Kleinsche Vierergruppe V_4 für die Typen 3a) und 3e).